INNOVATIVE TECHNOLOGICA
METHODICAL RESEARCH JOURNAL
ISSN: 2776-0987 Volume 3, Issue 9, Sep. 2022

DEVELOPMENT OF THE SUBJECT "DEFINITE INTEGRAL"

Bakhtiyor Radjabov,
Professor of the Department of Mathematics Teaching Methodology and Geometry, Chirchik State Pedagogical University

Lobar Ismailova Zokirovna
Chirchik State Pedagogical University, Tashkent Region,
2nd Year Master's Degree in Teaching Methodology of Natural Sciences (Mathematics)

Annotation

This article talks about the methodology of teaching mathematics, the organization and planning of lessons, examples of the topic of indefinite integral are considered.

Keywords: comparison, analysis and synthesis, postulates and theorems, propagation method, integration by pieces

"ANIQMAS INTEGRAL” MAVZUSINI LOYIHALASHTIRISH

Chirchiq davlat pedagogika universiteti Matematikani o`qitish metodikasi va Geometriya kafedrasi professori Baxtiyor Radjabov.
Lobar Ismoilova Zokir qizi. Toshkent viloyati Chirchiq davlat pedagogika universiteti Aniq va Tabiiy fanlarni o`qitish metodikasi(matematika) mutaxassisligi bo`yicha 2 - kurs magistri

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada matematika fanini o`qitish metodikasi, darslarni tashkil qilish va loyilashtirish haqida so`z yuritiladi, aniqmas integral mavzusiga doir misollar ko`rib chiqiladi

**KALITSO`ZLAR:** taqqoslash, analiz va sintez, postulat va teoremalar, yoyish usuli, bo`laklab integrallash

KIRISH

Ma'lumki, matematika fani mavjud moddiy dunyodagi narsalaming fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlami o'rganish jarayonida «ilmiy izlanish» metodlaridan foydalanadi. Shuning uchun ham ushbu darslikda ilmiy izlanish metodlaridan kuzatish va tajriba, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraktlashtirish va konkretlashtirishlami matematika darslarida qo‘llanishi ilmiy-metodik jihatidan tushuntirishga harakatqilingan. Matematikani o‘qitish jarayonida fikrlash formalarini paydo qilish metodikasi ham yoritilgan, ya'ni hissiy bilish (sezgi, idrok, tasavvur) bilan mantiqiy bilish (tushuncha, hukm, xulosa) orasidagi mantiqiy bog‘lanishlar ochib berilgan. Matematik tushuncha va uni o‘quvchilar ongida shakllantirish metodikasi, matematik hukm va uning turlari bo`lmish aksioma, postulat va teoremalarni o‘quvchilarga o‘rgatish metodikalari yoritilgan. Matematik xulosa va uning induktiv, deduktiv hamda analogik turlarini dars jarayonidagi tadbiqlari ko‘rsatilgan. Matematika fanini o‘qitishda didaktik prinsiplarning turlarini o‘rgatishga alohida ahamiyat berilgan.

Ma’lumki, matematika o‘qitish metodikasi fani pedagogika fanining ma’lum bir bo‘limi bo‘lib, u matematika fanini o‘qitish qoidalarini o‘rganish bilan shug‘ullanadi. Matematika o‘qitish metodikasi matematika fanini o‘qitish qonuniyatlarini o‘rganish jarayonida pedagogika, mantiq, psixologiya, matematika, lingvistika va falsafa fanlari bilan uzviy aloqada bo‘ladi. Boshqacha aytganda, maktabda matematika o‘qitish muammolari mantiq, psixologiya, pedagogika, matematika va falsafa fanlari bilan uzviy bog‘liqlikda hal qilinadi. Matematika o‘qitish metodikasining metodologik asosi bilish nazariyasiga asoslangandir. Matematika metodikasi fani matematik ta’limning maqsadi, mazmuni, formasi, uslubi va uning vositalarini dars jarayoniga tatbiqiy qonuniyatlarini o‘rganib keladi.

Dars loyihasi : 1. Mavzu va uning shu darsda o'tiladigan qismini ko'rsatish ;

2. Uy vazifalarini tekshirish;
3. Qaysi talabalardan sòraladi;
4. Talabalar uchun qanday mustaqil ishlar beriladi;
5. Yangi mavzu bayoni ko'rsatiladi va o'quvchilarga qayeri yozib olinishi aytiladi;
6. Òtilgan yangi mavzuni mustahkamlash uchun beriladigan savollar , misol va masalalar yozib qo'yiladi ;
7. Uyga beriladigan vazifa hamda talabalarga beriladigan ko'rsatmalar yozib qo'yiladi.

ASOSIY QISM

Boshlang‘ich funksiya. Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan F(x) funksiyaga ko‘ra uning hosilasi $f(x) = F'(x)$ ni yoki differensialini topishdan iborat edi.

Integral hisobning asosiy vazifasi buning teskarisi bo‘lib, F(x) funksiyani uning ma’lum f(x) hosilasiga yoki $f(x)dx$ differensialiga ko‘ra topishdan iborat. Demak, f(x) funksiya berilgan, shunday F(x) funksiyani topish kerakki, uning hosilasi f(x) ga teng bo`lsin, ya’ni

$$F`(x) = f(x) \tag{1}$$

bo`lsin.

Ta‘rif. Agar [a,b] kesmada aniqlangan f(x) funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida $F^1(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, F(x) funksiya shu kesmada f(x) funksiyaga nisbatan boshlang`ich funksiya deb ataladi.

Masalan: Boshlang`ich funksiya ta’rifiga asosan, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ funksiya $f(x)=x^3$ funksiyasi uchun boshlang`ich ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$

Agar f(x) funksiya uchun boshlang`ich funksiya mavjud bo`lsa, u boshlang`ich yagona bo`lmasligini ko`rish oson. $F(x)=\frac{x^4}{4}+6; F(x)=\frac{x^4}{4}+7$. Umuman $F(x)=\frac{x^4}{4}+c$.

Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar f(x) funksiyadan [a,b] kesmada boshlang`ich funksiyalari bo`lsa, ular orasida ayirma o`zgarmas songa teng bo`ladi. Agar berilgan f(x) funksiya uchun qanday bo`lmasin birgina F(x) boshlang`ich funksiya topilgan bo`lsa, F(x) funksiya uchun har qanday boshlang`ich funksiya F(x)+C ko`rinishga ega bo`ladi.

Aniqmas integral . Agar F(x) funksiya biror oraliqda f(x) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda F(x)+C (bu yerda C – ixtiyoriy doimiy) funksiyalar to‘plami shu kesmada f(x) funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx = F(x)+C$ kabi belgilanadi.

Bu yerda f(x) – integral ostidagi funksiya, f(x)dx integral ostidagi ifoda, $\int$ – integral belgisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni yoki berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topish jarayoni **integrallash** deyiladi.

ISSN: 2776-0987 Volume 3, Issue 9, Sep. 2022

Quyida aniqmas integralni hisoblash, kvadrat uchhadli ayrim integrallarni hisoblash usullari ko`rib chiqiladi.

- Yoyish usuli.
- Differensial belgisi ostiga kiritish usuli.
- O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli.
- Bo‘laklab integrallash usuli.
- Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash.

Berilgan funksiyani integrallash masalasida vaziyat ancha murakkab bo‘ladi. Bunda berilganelementar funksiya uchun boshlang‘ich funksiya (aniqmas integral) mavjudligini aniqlash bir masala bo‘lib, integral mavjudligi ma’lum taqdirda unihisoblash ancha qiyin muammo bo‘ladi. Bundan tashqari bir qator elementar funksiyalarning aniqmas integrali elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Masalan,

$$I_1 = \int e^{-x^2} dx\,, \quad I_2 = \int \cos x^2 dx\,, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\ln x} (x > 0,\, x \neq 1)\,, \quad I_4 = \int \frac{\sin x}{x} dx$$

kabi integrallar mavjud, ammo elementar funksiya bo‘lmaydi. Bu integrallar bilan aniqlanadigan funksiyalar maxsus funksiyalar deb ataladi va ular turli amaliy masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Masalan, I1 orqali aniqlanadigan maxsus funksiya Puasson (farang olimi, 1781 - 1840) integrali deb ataladi va ehtimolliklar nazariyasida, diffuziya va issiqlik o‘tkazish masalasini o‘rganishda keng qo‘llaniladi. I2 Frenel (farang fizigi va matematigi, 1788 - 1827) integrali deyiladi va optika masalalarini yechishda juda ko‘p qo‘llaniladi. I3 va I4 mos ravishda integral logarifm va integral sinus deb ataladi. Shunday qilib, aniqmas integralni hisoblashning umumiy usuli mavjud bo‘lmasdan, har bir integral o‘ziga xos bir usulda topilishi mumkin. Ammo ma’lum bir hollar uchun integralni hisoblash usullari ishlab chiqilgan va ular bilan tanishishga o‘tamiz.

2.1. Yoyish usuli. Bu usulda dastlab berilgan integral ostidagi murakkabroq f(x) funksiya soddaroq (masalan, integrallari bevosita jadval orqali topiladigan) fk(x) (k=1,2,…,n) funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasiga yoyiladi. So‘ngra bu chiziqli yoyilma integrali oldingi paragrafda ko‘rilgan integralning chiziqlilik xossalaridan foydalanilib hisoblanadi. Bu usulni matematik ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\int f(x)dx = \int [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \cdots + A_n f_n(x)]dx = A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + \cdots + A_n \int f_n(x)dx \quad (1)$$

ISSN: 2776-0987 Volume 3, Issue 9, Sep. 2022

Misol sifatida bu usulda quyidagi integrallarni hisoblaymiz:

$$\int \frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx = \int (\frac{7}{x}-5+\frac{1}{x^2})dx = 7\int \frac{dx}{x} - 5\int dx + \int \frac{dx}{x^2} = 7\ln|x| - 5x - \frac{1}{x} + C;$$

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}]dx = \frac{1}{2a}[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}] = \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 17-integral ekanligini eslatib o‘tamiz.
2.2.Differensial belgisi ostiga kiritish usuli. Bu usul aniqmas integralning ushbu invariantlik xossasi orqali amalga oshiriladi:
$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$. (2)

Bu tenglik differensialning invariantlik xossasidan kelib chiqadi va unda u=u(x) ixtiyoriy differentsiallanuvchi funksiyani ifodalaydi. Shunday qilib, integrallash o‘zgaruvchisi x biror differentsiallanuvchi u=u(x) funksiya bilan almashtirilsa, integral javobida ham x o‘rniga u=u(x) funksiya qo‘yiladi. Ko‘p hollarda bu usulni qo‘llash uchun dastlab integral ostidagi funksiyaning bir qismi differensial ostiga kiritiladi va integral kerakli ko‘rinishga keltiriladi. Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

$$\int \ln x d\ln x = (u = \ln x) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

$$\int (x+4)^{99}dx = \int (x+4)^{99}d(x+4) = (u = x+4) = \int u^{99}du = \frac{u^{100}}{100} + C = \frac{(x+4)^{100}}{100} + C.$$

Bu yerda $dx=d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = (u = \cos x) = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 13-integral javobining isbotini ifodalaydi. Bu usul yordamida quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni ham hisoblash mumkin:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C, \quad \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

2.3.O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bu usulda berilgan $\int f(x)dx$ integraldagi “eski” x o‘zgaruvchidan “yangi” t o‘zgaruvchiga biror x=φ(t) funksiya orqali o‘tamiz. Bunda φ(t) funksiya almashtirma deb ataladi va u differensiallanuvchi, hosilasi uzluksiz hamda teskari funksiyasi t=φ –1(x) mavjud deb olinadi. Bu holda
$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ (3)

INNOVATIVE TECHNOLOGICA
METHODICAL RESEARCH JOURNAL
ISSN: 2776-0987 Volume 3, Issue 9, Sep. 2022

tenglik (o‘zgarmas son aniqligida) o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi integral hisoblangandan keyin, t o‘zgaruvchi o‘rniga t=φ –1(x) qo‘yilib, berilgan integral javobi olinadi. Yuqoridagi (3) tenglikni o‘rinli ekanligini isbotlash uchun uning har ikki tomonining hosilalari o‘zaro teng ekanligi ko‘rsatish kifoya. Bunda, oldingi paragrafda ko‘rsatilgan aniqmas integralning I xossasiga asosan, chap tomondagi integral hosilasi integral ostidagi f(x) funksiyaga teng bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda t=φ –1(x) bo‘lgani uchun u x o‘zgaruvchining murakkab funksiyasi bo‘ladi. Shu sababli murakkab funksiyani differensiallash qoidasi va teskari funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt)'_x = (\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt)'_t\cdot\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

natijani olamiz. Demak, haqiqatan (3) tenglikning ikkala tomoni bir xil f(x) hosilaga ega va shu sababli u o‘rinlidir. Berilgan integralni (3) tenglik yordamida hisoblash o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli deb ataladi. Agar (3) tenglikda f [φ(t)]·φ ′(t)=g(t) deb belgilasak, unda o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida f(x) funksiyani integrallash masalasi g(t) funksiyani integrallash masalasiga keladi. Ayrim hollarda x=φ(t) yoki t=φ –1(x) almashtirmani shunday tanlash mumkinki, g(t) funksiya oson integrallanadi. Bu almashtirmani tanlash berilgan integral ko‘rinishiga qarab amalga oshiriladi va integral hisoblovchini mahorati va tajribasiga bog‘liq bo‘ladi.

Yangi mavzu tushuntirilib , talabalar savollariga javob beriladi . Uyga vazifa quyidagi aniqmas integrallar jadvalini o’rganib kelish .

Asosiy integrallash jadvali:

1) $\int 0\cdot dx = C$ 2) $\int 1\cdot dx = x + C$

3) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$ 4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

5) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C$ 6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

ISSN: 2776-0987 Volume 3, Issue 9, Sep. 2022

9) $\int \cos x dx = \sin x + C$ 10) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

11) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

XULOSA

Differensiallash amaliga nisbatan integrallash amali ancha murakkabdir. Hatto ayrim elementar funksiyalarning aniqmas integrallari elementar funksiyalar sinfida mavjud bo‘lmasdan, ular maxsus (noelementar) funksiyalar orqali ifodalanadi. Bundan tashqari ixtiyoriy aniqmas integralni hisoblashga imkon beradigan universal, umumiy usul mavjud emas. Shu sababli faqat ayrim , ma’lum bir xususiyatlarga ega bo‘lgan, aniqmas integrallarni hisoblash usullarini ko‘rsatish mumkin. Ularga yoyish, differensial ostiga kiritish, o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash usullari kiradi. Ko‘rsatilgan usullardan foydalanib kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash mumkin.

ADABIYOTLAR

1. A.Gaziyev.Matematik analiz.1-qism.Darslik.-Samarqand: «SamDU», 2020.
2. Azlarov T.,Mansurov X. Matematik analiz.1-qism.Toshkent «O’qituvchi»,1994.
3. 18. Boboeva M.N., Rasulov T.X. Muammoli tenglamalardan foydalanish usuli talabalarga matritsa nazariyasini o'rgatish // Akademiya. 55:4 (2020), bet. 68-71.
4. T.Sharifova,E.Yuldashev.Matematik analizdan misol va masalalar yechish.Toshkent «O’qituvchi»,1996.
5. A.Sadullaev, G.Hudoyberganov, A.Vorisov, X.Mansurov, B.Shoimqulov, T.To’ychiyev, N.Sultanov. Matematik analizdan masalalar to’plami. 1-qism.Toshkent.2008.